UNIDAD DE APRENDIZAJE IV

Saberes procedimentales	Saberes declarativos	
1. Interpreta y utiliza correctamente el lenguaje simbólico ara el manejo de expresiones algebraicas. 2. Identifica operaciones básicas con expresiones algebraicas.	A	Expresiones algebraicas racionales.
	B	Fracciones equivalentes.
	C	Fracciones algebraicas.
	D	Algoritmo de las operaciones con fracciones (simplificación, suma, resta, multiplicación y división).
	E	Fracciones compuestas. Simplificación.

A Expresiones algebraicas racionales.

A que se le puede llamar expresión algebraica racional?

Se conoce como expresión algebraica racional a aquella fracción que esta compuesta por un numerador y un denominador en forma de polinomio.

Numerador $\rightarrow$ $\frac{x+1}{x^2-4}$ $\leftarrow$ Denominador

B Fracciones Equivalentes

Las fracciones equivalentes son fracciones que aunque lucen diferentes su resultado es exactamente el mismo. Por ejemplo.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=.5$$

C Fracciones Racionales

Como anteriormente se menciono es una fracción la cual puede contener en su numerador y denominador expresiones algebraicas.

$$\frac{(x+2)^2}{x-4}$$

D Operaciones con Fracciones

-Suma y resta

Para trabajar con la suma y resta basta con recordar los pasos de como realizábamos dichas operaciones en primaria, donde solo utilizábamos números y no expresiones algebraicas.

Los siguientes pasos te ayudaran para poder resolver algunas fracciones:

1. Analizar las fracciones que se pretenden sumar o restar, de inicio nos enfocaremos en el denominador de cada fracción, ya que si este es igual la suma o resta se seimplifica enormemente, ya que el denominador queda exactamente igual y solo los numeradores se unen dependiendo de su signo, como se muestra a continuación.

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1+3-2}{4}=\frac{2}{4}$$

Esto aplica exactamente igual si las fracciones contienen expresiones algebraicas, como se muestra a continuación.

$$\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{x+1}+\frac{5}{x+1}=\frac{x-2x+5}{x+1}=\frac{-x+5}{x+1}$$

Ejercicios Resolver los siguientes ejercicios.

a) $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x-1}{x+1}+\frac{x}{x+1}=$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{x^2+x-1}{x^2-1}-\frac{2x^2+1}{x^2-1}+\frac{3x+2}{x^2-1}=$ c) $\frac{5x}{x-4}+\frac{3x^2+2x-5}{2x-x-4}=$

2. Si la fracción analizada no cumple con lo anterior y el denominador en todos los casos es diferente, llevará un proceso muy distinto al anterior.

Para resolver lo siguiente ocuparemos encontrar el común denominador existente entre las fracciones, dicho valor se convertirá en el denominador resultante, dicho resultado se dividirá entre el denominador de cada fracción y multiplicado por el numerador de dicha fracción, como se muestra a continuación.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3(5)+2(4)}{20}=\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}$$

En el caso anterior resulta fácil ya que al ser dos números solo se multiplica y seguimos con el proceso, en el caso de expresiones algebraicas se recomienda que solo se deje expresada la multiplicación por si existe alguna forma de eliminar el termino, solo hasta el final donde ya no se pueda efectuar nada , se procede a simplificar el termino , como se muestra a continuación.

$$\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x(x+1)+(x+2)(x+2)}{(x+2)(x+1)}=\frac{x^2+x+x^2+2x+2x+4}{(x+2)(x+1)}=\frac{2x^2+5x+4}{(x+2)(x+1)}$$

Para el caso de 3 fracciones que se estén sumando o restando se realizará el mismo procedimiento, para poder ver si esta fracción puede simplificarse se deberá de determinar las raíces del numerador y ver si es posible eliminar alguna raíz del numerador con la del denominador.

Ahora veremos el ejemplo con tres fracciones.

$$\frac{2a-3}{3a}+\frac{3x+2}{10x}+\frac{x-a}{5ax}=\frac{(2a-3)(10x)(5ax)+(3x+2)(3a)(5ax)+(x-a)(3a)(10x)}{(3a)(10x)(5ax)}$$

$$=\frac{(2a-3)(50ax^2)+(3x+2)(15a^2x)+(x-a)(30ax)}{(3a)(10x)(5ax)}=\frac{100a^2x^2-150ax^2+45a^2x^2+30a^2x+30ax^2-30a^2x}{(3a)(10x)(5ax)}=$$

$$=\frac{145a^2x^2-120ax^2}{(3a)(10x)(5ax)}=\frac{145a^2x^2-120ax^2}{150a^2x^2}$$

Ejercicios Resolver los siguientes ejercicios.

a) $\frac{x-2}{4}+\frac{3x+2}{6}=$

b) $\frac{a-2b}{15a}+\frac{b-a}{20b}=$

c) $\frac{a+3b}{3ab}+\frac{a^2b-4ab^2}{5a^2b^2}=$

d) $\frac{a-1}{3}+\frac{2a}{6}+\frac{3a+4}{12}=$

e) $\frac{x+2}{3x}+\frac{x^2-2}{5x^2}+\frac{2-x^3}{9x^3}=$

f) $\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}-\frac{4x-7}{x^2-x-6}=$

g) $\frac{x-1}{4x+4}-\frac{x+2}{8x-8}=$

h) $\frac{2}{x-2}+\frac{2x+3}{x^2+2x+4}-\frac{6x+12}{x^3-8}=$

i) $\frac{x}{a^2-ax}+\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=$

j) $\frac{a^3}{a^3+1}+\frac{a+3}{a^2-a+1}-\frac{a-1}{a+1}=$

-Multiplicacion.

Para poder resolver multiplicaciones de fracciones consideraremos otras cuestiónes un tanto diferente a la suma y multiplicación, para realizar dicho trabajo podremos considerar lo siguiente:

1. Cuando se multiplicará fracciones es importante recordar que serán multiplicados todos los numeradores y colocados en el numerador del resultado, de igual manera se multiplicaran los denominadores y su resultado se pondrá en el denominador del resultado.
2. Se podrá descomponer en factores los términos de las fracciones que se van a multiplicar, este paso servirá para aquellos que apenas se están iniciando en este tipo de ejercicios.

$$\left(\frac{2a}{3b^3}\right)\left(\frac{3b^2}{4x}\right)\left(\frac{x^2}{2a^2}\right)=\frac{(2)(3)(a)(b^2)(x^2)}{(2)(3)(4)(a^2)(b^3)(x)}$$

3. Se podrá simplificar suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

$$=\frac{(\cancel{2})(\cancel{3})(\cancel{a}))(b^{\cancel{2}})(x^{\cancel{2}})}{(\cancel{2})(\cancel{3})(4)(a^{\cancel{2}})(b^{\cancel{3}})(\cancel{x})}=\frac{x}{4ab}$$

A continuacion veremos algunos ejercicios.

$$\left(\frac{2ax^2}{3bc^3}\right)\left(\frac{5cx}{4a}\right)=\left(\frac{(2ax^2)(5cx)}{(3bc^3)(4a)}\right)$$

Despues de realizar las multiplicaciones correspondientes tendremos lo siguiente.

$$=\frac{10\cancel{ac}x^3}{12\cancel{a}bc^{\cancel{3}}}=\boldsymbol{\frac{5x^3}{6bc^2}}$$

Ahora veremos el siguiente ejemplo paso por paso.

$$\left(\frac{1-x}{a+1}\right)\left(\frac{a^2-a}{x-x^2}\right)\left(\frac{x^2}{a}\right)$$

Para el ejemplo anterior empezamos por poner los factores que se van a multiplicar tanto en en numerador como en el denominador.

$$\left(\frac{1-x}{a+1}\right)\left(\frac{a^2-a}{x-x^2}\right)\left(\frac{x^2}{a}\right)=\frac{(1-x)(a^2-a)(x^2)}{(a+1)(x-x^2)(a)}$$

Para evitar posibles confusiones comenzamos por los dos primeros paréntesis.

$$\frac{(1-x)(a^2-a)(x^2)}{(a+1)(x-x^2)(a)}=\frac{(a^2-a-xa^2+xa)(x^2)}{(ax-ax^2+x-x^2)(a)}$$

Por ultimo multiplicamos el último término.

$$\frac{(a^2-a-xa^2+xa)(x^2)}{(ax-ax^2+x-x^2)(a)}=\frac{a^2x^2-ax^2-x^3a^2+x^3a}{a^2x-a^2x^2+ax-ax^2}$$

En este momento procedemos a encontrar un factor común para poder simplificar el sistema, para este caso el factor común en ambos casos será ***ax.***

$$\frac{a^2x^2-ax^2-x^3a^2+x^3a}{a^2x-a^2x^2+ax-ax^2}=\frac{\cancel{ax}(ax-x-x^2a+x^2)}{\cancel{ax}(a-ax+1-x)}=\boldsymbol{\frac{ax-x-x^2a+x^2}{a-ax+1-x}}$$

Nota: Recordemos que el resultado podrá ser llevado hasta su minima expresión como en el ejemplo pasado que la fracción de los números se sustituyo por un número equivalente, asi como se debe de recordar las leyes del exponente y que al ser bases iguales los exponentes se sumaran.

Ejercicios Resolver los siguientes ejercicios.

a) $\left(\frac{x^2y}{5}\right)\left(\frac{10a^3}{3m^2}\right)\left(\frac{9m}{x^3}\right)=$

b) $\left(\frac{5x^2}{7y^3}\right)\left(\frac{4y^2}{7m^3}\right)\left(\frac{14m}{5x^4}\right)=$

c) $\left(\frac{5}{a}\right)\left(\frac{2a}{b^2}\right)\left(\frac{3b}{10}\right)=$

d) $\left(\frac{2x^3}{15a^3}\right)\left(\frac{3a^2}{y}\right)\left(\frac{5x^2}{7xy^2}\right)=$

e) $\left(\frac{7a}{6m^2}\right)\left(\frac{3m}{10n^2}\right)\left(\frac{5n^4}{14ax}\right)=$

f) $\left(\frac{m+n}{mn-n^2}\right)\left(\frac{n^2}{m^2-n^2}\right)=$

g) $\left(\frac{2a-2}{2a^2-50}\right)\left(\frac{a^2-4a-5}{3a-3}\right)=$

h) $\left(\frac{5x+25}{14}\right)\left(\frac{7x+7}{10x+50}\right)=$

i) $\left(\frac{2x^2+x}{6}\right)\left(\frac{8}{4x+2}\right)=$

j) $\left(\frac{7a}{6m^2}\right)\left(\frac{3m}{10n^2}\right)\left(\frac{5n^4}{14ax}\right)$

-Division.

Cuando hablamos de una división de fracciones esta trae un pequeño problema en su comprensión , ya que usualmente el alumno ve tanto valor dispuesto en un formato que no le resulta del todo fácil , a continuación se explicará algunas consideraciones que se deben de tener al trabajar con división de fracciones.

1. Al analizar una división de fracciones primeramente tenemos que conocer que tendrá un numerador y un denominador.

Numerador 1

Denominador 1

$$=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{2x}}$$

Numerador

Numerador 2

Denominador 2

Denominador

Entonces al ver lo anterior sabemos que a pesar de ser fracciones el numerador podrá tener al mismo tiempo numerador y denominador (ya que dicho denominador esta compuesto de una fracción), de igual forma pasa con el denominador.

Para resolver lo siguiente basta con realizar una simple multiplicación de la siguiente forma:

$$=\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x+1}{2x}}$$

De tal forma que obtendremos lo siguiente.

$$=\frac{2\cancel{x}(x^2-1)}{\cancel{x}(x+1)}=\frac{2(x^2-1)}{x+1}$$

Al tener este resultado podrá ser descopuesto si consideramos lo siguiente.

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

Al sustituir lo anterior en el sistema algebraico tendríamos algo como se muestra a continuación.

$$=\frac{2(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=\mathbf{2x-2}$$

2. Un segundo caso existiría si alguno de ellos fuera un valor entero, para ese caso resulta sumamente fácil ya que solo será necesario agregar la unidad dividiéndolo y aplicar el sistema anterior.

Si tenemos algo como lo siguiente podríamos aplicar lo que anteriormente se menciono.

$$=\frac{\frac{x+1}{x^2}}{2x}$$

Si agregamos la unidad antes mencionada el sistema algebraico no se afectará en nada ya que recordemos que cualquier cosa dividido entre 1 siempre será el valor inicialmente dividido como se muestra a continuación.

$$\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{2x}{1}}$$

Despues de tener el sistema dispuesto asi procedemos a aplicar el sistema anterior.

$$= \frac{1(x+1)}{x^2(2x)} = \boldsymbol{\frac{x+1}{2x^3}}$$

Ejercicios Resolver los siguientes ejercicios.

a) $\frac{\frac{zx}{2x+1}}{\frac{3x}{-2zx}}$

b) $\frac{x^2+4x+4}{\frac{x+2}{x}}$

c) $\frac{\frac{x^2}{3y^2}}{\frac{2x}{y^3}}$

d) $\frac{15m^2}{19ax^3} \div \frac{20y^2}{38a^3x^4}$

e) $6a^2x^3 \div \frac{a^2x}{5}$

f) $\frac{3a^2}{a^2+6ab+9b^2} \div \frac{5a^3}{a^2b+3ab^2}$

g) $\frac{1}{a^2-a-30} \div \frac{2}{a^2+a-42}$

h) $\frac{x^2-121x}{x^2-49} \div \frac{x^2-11x}{x+7}$

i) $\frac{a^2-6a+5}{a^2-15a+56} \div \frac{a^2+2a-35}{a^2-5a-24}$

j) $\frac{16x^2-24xy+9y^2}{16x-12y} \div \frac{64x^3-27y^3}{32x^2+24xy+18y^2}$